

□ LOGIQUE & CALCUL

Libre arbitre et mécanique quantique

John Conway et Simon Kochen démontrent un théorème qui signifie que si nous sommes libres, alors les particules élémentaires le sont aussi.

Jean-Paul DELAHAYE

1. Le skieur quantique



La mécanique quantique indique que le trajet d'une particule n'est pas localisé. La particule peut contourner un obstacle : une « partie » de la particule peut emprunter une trajectoire, l'autre « partie » en emprunter une autre. Après le passage de l'obstacle, la particule se recompose par interférence. Tant que l'on ne mesure pas la position de la particule, elle existe en différents endroits, comme les physiciens l'ont observé en la faisant interférer avec elle-même.

L'extension des propriétés quantiques à des objets macroscopiques, tel le skieur, surprend. La démarche de J. Conway et S. Kochen décrite dans l'article procède dans le sens inverse : des propriétés macroscopiques, tel le libre arbitre d'un individu, ont des conséquences quantiques sur le comportement des particules.

Un des plus grands mathématiciens vivants s'est associé à un spécialiste respecté de mécanique quantique pour mettre en évidence l'étrangeté de notre monde ! Dans un article publié en 2006, puis épuré et perfectionné en 2009, John Conway, de l'Université de Princeton (inventeur du *Jeu de la vie*), associé dans l'aventure à Simon Kochen, aussi mathématicien à Princeton, présentent le théorème du libre arbitre (*The Free Will Theorem*). L'article est fondé sur trois axiomes en partie testables, liés à la mécanique quantique et à la relativité. Sur la base de ces axiomes, les auteurs démontrent que si un expérimentateur dispose du libre arbitre, alors les particules elles-mêmes disposent aussi de libre arbitre !

L'utilisation du concept de libre arbitre peut choquer, mais nous verrons qu'en prenant le terme *libre arbitre* dans le sens donné par J. Conway et S. Kochen, l'expression est bien choisie : elle force à repenser l'indéterminisme de la mécanique quantique sans l'associer à des probabilités, ce qui en éclaircit le sens et la portée.

Indétermination logique

Selon J. Conway et S. Kochen, une entité dispose de libre arbitre à l'instant t si son état ne peut pas être décrit comme résultat de l'application d'une fonction, au sens mathématique, portant sur l'état de l'Univers avant

l'instant t . Ce libre arbitre, qui n'a rien à voir avec les probabilités puisqu'il affirme juste la non-existence d'une certaine fonction, est un indéterminisme logique (ou si l'on veut préciser, fonctionnel).

Bien sûr, ce libre arbitre-là n'est pas exactement celui qu'on évoque en philosophie et en droit où, par exemple, il fonde la notion de responsabilité. Cependant, J. Conway considère qu'il n'est pas sans rapport et met en évidence un point qui n'était pas clair avant ces travaux : l'indéterminisme que la physique moderne semble obligée d'accepter est une notion fonctionnelle et logique. Cet indéterminisme est l'impossibilité logique qu'il existe certaines fonctions reliant les états de l'Univers, impossibilité qui signifie que d'instant en instant l'Univers n'est pas contraint par son passé, mais libre de son évolution.

Pour J. Conway et S. Kochen, quiconque accepte leurs trois axiomes nommés SPIN, TWIN (tous deux liés à la mécanique quantique) et MIN (lié à la relativité et à l'idée qu'un expérimentateur est libre de ses choix) doit aussi admettre que l'état d'une particule à l'instant t n'est pas logiquement déterminé par l'état de l'Univers autour de la particule avant l'instant t . Dit simplement, s'il y a un peu de libre arbitre pour les gros systèmes physiques que nous sommes, alors l'Univers est plein de libre arbitre et celui-ci est microscopique.

Tous les commentaires s'accordent sur l'importance de ce résultat qui complète d'autres contributions classiques comme

2. La détermination impossible avant la mesure

Le théorème de Kochen-Specker est illustré par un polyèdre représenté sur la figure ci-dessous. En s'appuyant sur ce polyèdre, on définit 33 axes de l'espace. Le théorème énonce qu'il est impossible d'attribuer une valeur 0 ou 1 à chacun des 33 axes de façon que pour tout triplet d'axes orthogonaux x, y, z , les valeurs attribuées soient 1-1-0, 1-0-1 ou 0-1-1.

Selon la mécanique quantique, quand on mesure selon trois axes orthogonaux le carré du spin d'une

particule de spin unité, on trouve toujours 1-1-0, 1-0-1, ou 0-1-1.

Si le spin est fixé avant qu'on en mesure le carré, cela signifie que pour toute direction, il y a un résultat disponible avant la mesure et que ce résultat est conforme à ce qu'indique la mécanique quantique (c'est-à-dire 1-1-0, 1-0-1, ou 0-1-1 pour trois axes orthogonaux).

L'existence du résultat avant qu'on en prenne connaissance par la mesure implique donc, en particulier (en prenant en compte uni-

quement les 33 directions), qu'il est possible d'attribuer des 0 et des 1 aux 33 directions de façon que trois axes orthogonaux donnent toujours 1-1-0, 1-0-1, ou 0-1-1. (Si le spin est déterminé avant la mesure, la mécanique quantique nous dit plus, elle dit que cette histoire de 1-1-0, 0-1-1, 1-0-1 est vraie pour tout triplet orthogonal sans qu'il faille se limiter aux 33 axes.)

Il existerait donc une façon de mettre des 0 et des 1 aux 33 directions avec la propriété 1-1-0, 0-1-1,

1-0-1. Mais cela contredit le théorème de Kochen-Specker qui ne peut être faux (on l'a démontré). Ce qui est faux, c'est que nous avons supposé que le spin avait une valeur selon chaque axe et respectait la mécanique quantique.

Comme on a supposé que la mécanique quantique sur ce point était valide, c'est donc que le spin n'a pas de valeur déterminée avant qu'on le mesure : le spin se « décide » au moment de la mesure, pas avant.

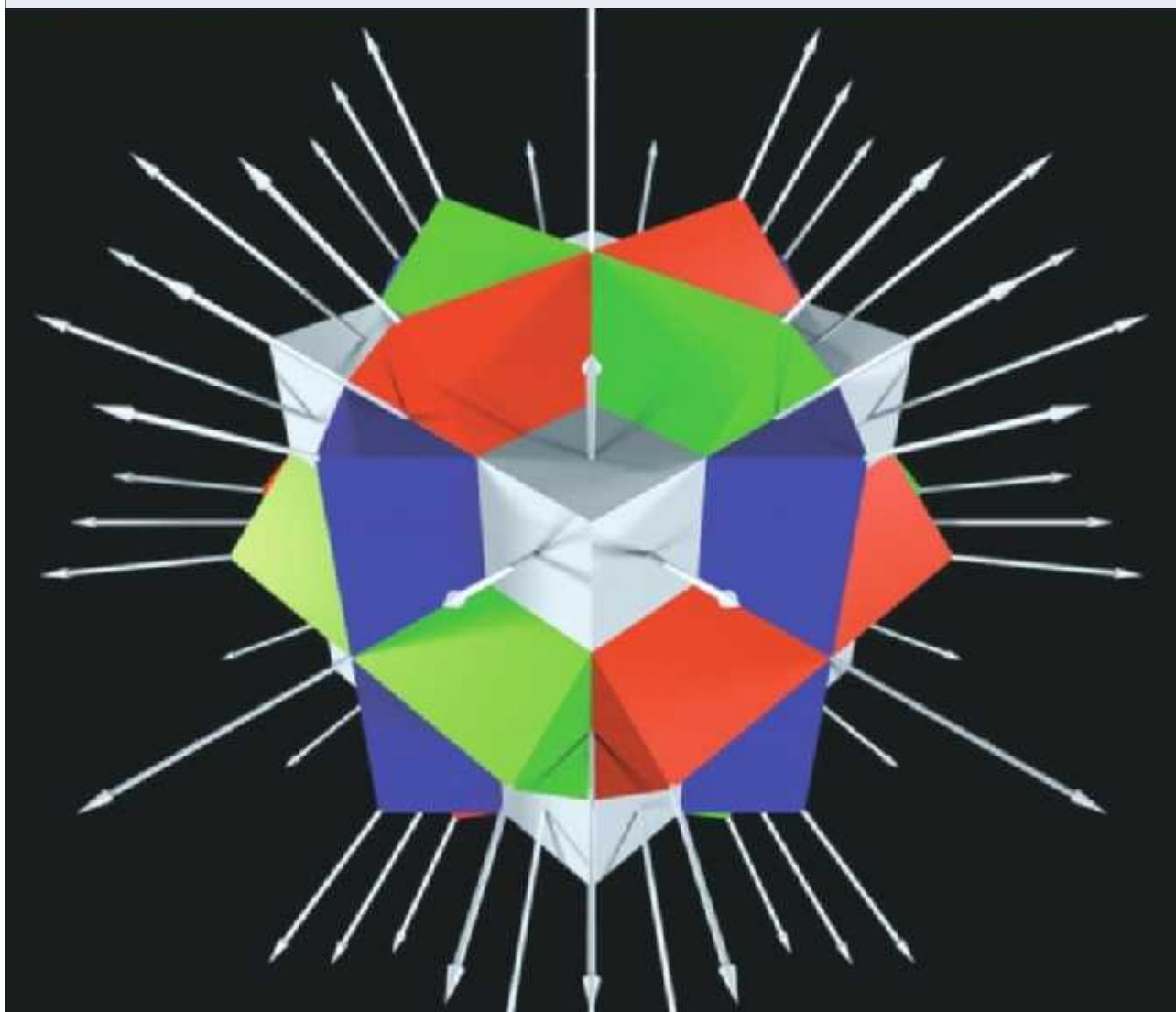


Image réalisée par Francesco De Comitè

le paradoxe EPR (présenté en 1935 par Albert Einstein, Boris Podolsky et Nathan Rosen), les inégalités de John Bell de 1964, et surtout le paradoxe de Kochen-Specker que le nouveau raisonnement utilise d'ailleurs comme élément central de la démonstration. Le théorème du libre arbitre, contribution majeure à la compréhension de la mécanique quantique, est un pas vers une situation où personne ne pourra plus dire, comme Richard Feynman : « Si quelqu'un vous affirme qu'il comprend la mécanique quantique, vous avez affaire à un menteur. »

L'axiome SPIN

Le premier axiome, SPIN, concerne le résultat de la mesure du spin d'une particule. Le spin est parfois assimilé à un moment cinétique, mais la seule chose qui compte pour nous est que, parmi les conséquences de la mécanique quantique, il y a l'énoncé SPIN, lequel stipule que :

Axiome SPIN. *La mesure du carré du spin d'une particule de spin unité, selon trois axes orthogonaux x , y et z donne toujours deux 1 et un 0, soit 1-0-1, 0-1-1, ou 1-1-0.*

Cette conséquence testable de la mécanique quantique, et admise comme axiome, est bien sûr moins forte que l'ensemble de la mécanique quantique : en bons mathématiciens, nos deux auteurs minimisent les hypothèses qu'ils utilisent. Pourtant, à elle seule, elle est déjà troublante, car nous allons voir qu'elle implique que le spin d'une particule de spin unité n'existe pas avant d'avoir été mesuré. En effet, le théorème de Kochen-

Specker de 1967, simplifié par Asher Peres en 1991, stipule que :

Si on considère les 33 axes du schéma de la figure 2, il n'existe aucune façon de leur attribuer des valeurs 0 ou 1 qui soit telle que chaque triplet d'axes orthogonaux donne les valeurs 1-0-1 dans cet ordre ou un autre.

Démontrer le théorème de Kochen-Specker consiste simplement à traiter un puzzle géométrique et combinatoire. On essaie de placer des 1 et des 0 aux extrémités des 33 axes de la figure de Peres en respectant la règle des trois directions orthogonales, toujours 1-0-1 dans cet ordre ou un autre, et on s'aperçoit qu'on n'y arrive pas.

Il existe des démonstrations directes de ce théorème, mais vous pouvez écrire un programme qui essaie toutes les combinaisons possibles de 0 et de 1 pour les 33 axes de Peres (il y en a 2^{33}), et qui, pour chaque combinaison, teste la propriété des trois axes orthogonaux. Votre programme conclura que parmi les 2^{33} combinaisons, aucune n'est satisfaisante.

Ce théorème, associé à SPIN, montre que les objets de la mécanique quantique ont des comportements inattendus. On pourrait penser que, quel que soit l'axe choisi pour mener la mesure, le spin d'une particule de spin unité est fixé avant l'opération. L'idée est naturelle : avant la mesure et indépendamment de ce que prévoit l'expérimentateur, le résultat serait inscrit dans la particule et son environnement.

Pour connaître la réponse, il faudrait faire intervenir des variables dont nous n'avons pas connaissance et que l'on nomme *variables cachées*. La mécanique

quantique ne dirait pas précisément ce qu'on va trouver, car elle ne serait, dans cette hypothèse, pas assez précise. Toutefois, en ajoutant d'autres variables, c'est-à-dire en complétant la mécanique quantique, on saurait proposer une théorie où ce que l'on observe est bien déterminé avant qu'on en fasse l'observation.

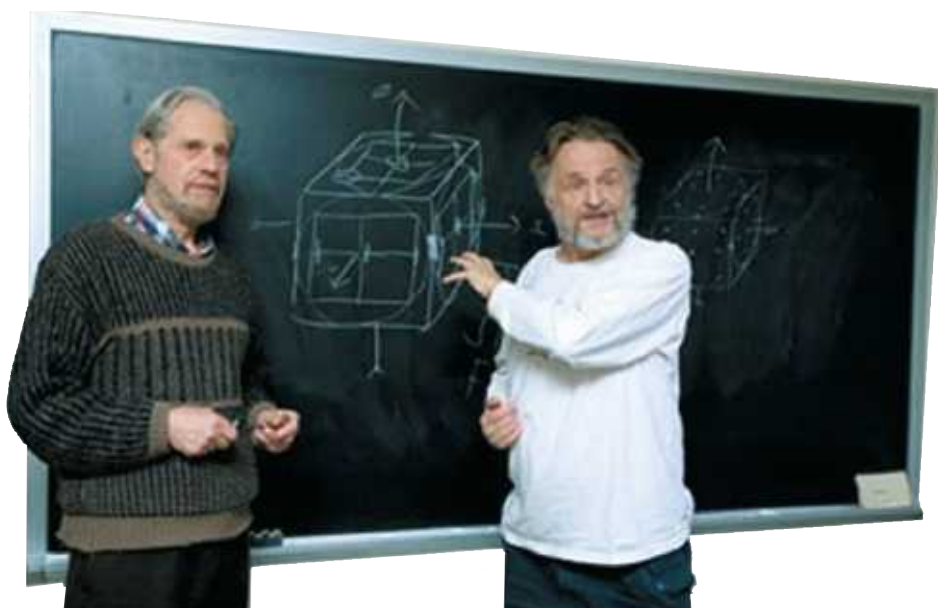
Le théorème de Kochen-Specker est fatal à une telle conception dite *réaliste*, car si une théorie à variables cachées (connue ou inconnue de nous) était vraie, alors l'ensemble des résultats des valeurs de spin déterminées par ces variables cachées quand on fait varier l'axe de mesure vérifierait la propriété 1-0-1 pour tout triplet d'axes orthogonaux. Or, en ne considérant que les 33 directions de Peres (et non pas l'infinité des directions possibles), c'est déjà mathématiquement impossible.

Le théorème de Kochen-Specker implique la fausseté de toutes les théories à variables cachées. Imaginer des variables non décrites par la mécanique quantique ne permettra jamais de proposer un complément à cette théorie (par ailleurs toujours vérifiée) qui soit compatible avec ce qu'on en sait déjà, et cela uniquement à cause de l'affirmation SPIN.

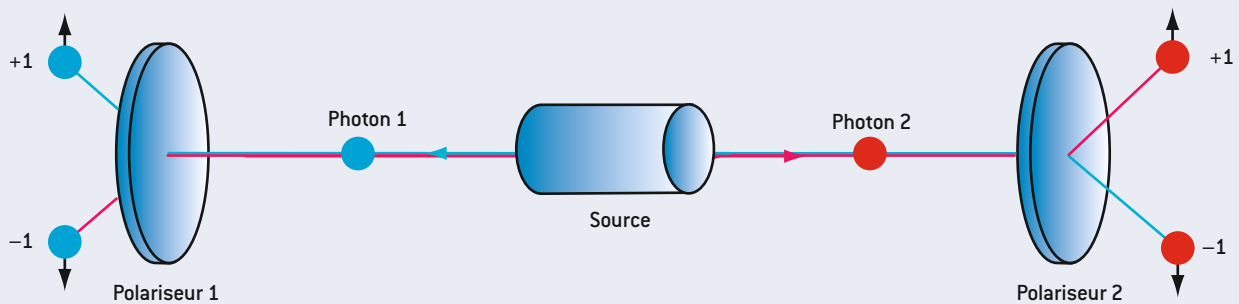
Pour être précis, il faut indiquer que nous avons uniquement envisagé des variables cachées *non contextuelles*, c'est-à-dire qui fixent les résultats de la mesure selon un axe x , sans prendre en compte que l'observateur est aussi en train de mener des mesures selon les axes y et z . Qu'il puisse y avoir des variables cachées contextuelles (dans ce cas, le résultat de la mesure selon x ne dépend pas seulement de l'environnement de la particule et de x , mais aussi du fait que vous tentez en même temps de mesurer selon d'autres axes y et z) ne semble pas sérieusement envisageable, et en tout cas n'est pas conforme à l'idée d'une réalité autonome que soutiennent les défenseurs des variables cachées.

Quand on mesure le poids et la couleur d'un objet, le résultat pour le poids est

3. SIMON KOCHEN (à gauche) et JOHN CONWAY (à droite) exposant le théorème du libre arbitre.



4. Le paradoxe EPR (Einstein, Podolsky et Rosen)



La mécanique quantique indique comment fabriquer des paires de particules jumelles, qui sont par ailleurs utilisées pour la réalisation de certains protocoles de cryptographie quantique. L'expérience de pensée décrite ici est celle du paradoxe de Einstein, Podolski et Rosen ; elle a été réalisée par le physicien français Alain Aspect en 1982.

Une paire de particules jumelles est fabriquée, ici deux photons. Elles s'éloignent l'une de l'autre à la vitesse de la lumière si bien que toute communication est impossible entre elles. Même si celles-ci

sont très éloignées l'une de l'autre, toute mesure (ici une mesure de polarisation de valeur +1 ou -1) faite sur les deux particules donne des résultats identiques. Donc si l'on fait la mesure sur l'une, on sait le résultat qu'a donné la mesure sur l'autre. Le fait est troublant : l'interprétation classique de la mécanique quantique considère que l'état d'une particule n'est pas déterminé avant qu'on opère la mesure, cela contrairement aux théories à variables cachées qui soutiennent que le résultat est fixé (même si la mécanique quantique ne le donne pas du fait de son incomplétude).

le même que lorsque l'on mesure le poids et la longueur ; envisager qu'il puisse en être autrement – c'est-à-dire envisager des variables contextuelles – semble absurde. C'est pourtant ce à quoi le théorème de Kochen-Specker accule ceux qui tentent à tout prix de concevoir des théories où les résultats d'une mesure sont fixés avant que la mesure soit menée. Ou bien il n'y a pas de variables cachées, ou bien elles sont contextuelles, mais le réaliste ne retombe jamais sur ses pieds, et le monde quantique n'aura donc jamais les bons comportements qu'il attend. Le plus simple est d'accepter que le résultat d'une mesure n'existe pas avant la mesure.

Notons, avant de poursuivre, que le théorème du libre arbitre ne dépend pas de la position que l'on adopte à propos des variables cachées, contextuelles ou non. Il dépend uniquement de l'axiome SPIN testable expérimentalement, du théorème de Kochen-Specker, qui n'est pas une hypothèse mais une affirmation élémentaire et démontrée de combinatoire géométrique, et des deux autres axiomes auxquels nous arrivons.

On sait produire des particules jumelles dont la théorie quantique indique que, même éloignées l'une de l'autre, elles fourniront des résultats identiques si on les soumet à des opérations de mesure identiques.

Particules jumelles

Si l'on accepte que les résultats d'une mesure ne sont pas fixés à l'avance, les deux particules d'une paire de particules jumelles « communiqueraient instantanément » pour s'entendre sur le résultat qu'elles doivent rendre ! Sans approfondir ce que signifie dans un tel contexte « communiquer instantanément », l'axiome TWIN prend en compte un fait expérimental testable, dans le cadre d'une expérience de pensée, que nous nommerons A-B-a-b.

Axiome TWIN. *Considérons une paire de particules jumelles a et b de spin unité. Si l'expérimentateur A mesure le carré du spin de a selon trois axes orthogonaux x, y, z, pendant que l'expérimentateur B mesure le carré du spin de b selon l'axe w, alors, si w est l'un des trois axes x, y ou z, le résultat*

que découvrira B sera le même que celui que découvrira A pour l'axe correspondant.

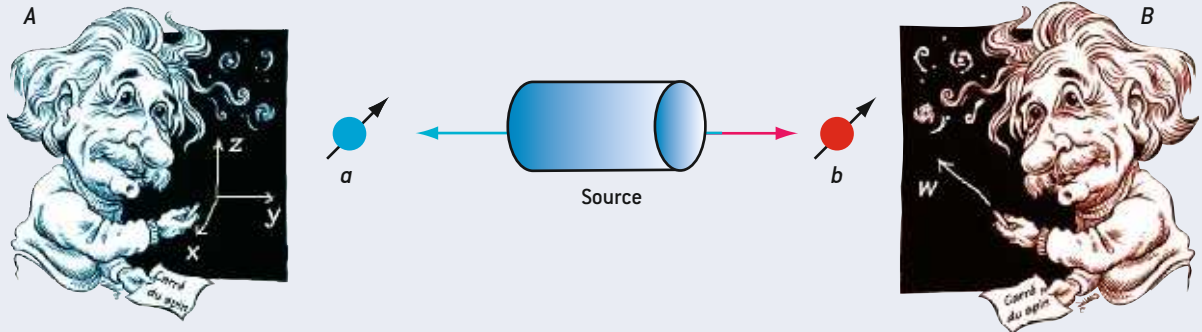
L'existence et les propriétés de telles particules jumelles sont aujourd'hui une certitude. L'axiome TWIN doit donc être considéré non pas comme une propriété hypothétique et théorique, mais comme une propriété certaine de notre monde physique, indépendamment du reste de la mécanique quantique.

Le dernier axiome est le plus délicat, car il se réfère à la relativité et qu'il tente de rendre précise l'idée de localité, c'est-à-dire l'idée que ce qui se passe en un point de l'espace ne peut pas avoir d'influence causale sur ce qui se passe au même instant en un point éloigné.

L'axiome relativiste

Il est naturel d'admettre la forme élémentaire suivante du principe de causalité, car cela semble une question de bon sens : *il est impossible à un événement d'influer sur un événement passé.*

5. L'expérience de pensée de John Conway et Simon Kochen



Voici l'expérience de pensée *A-B-a-b* qui, selon J. Conway et S. Kochen, prouve que si les expérimentateurs *A* et *B* disposent de libre arbitre pour mener leurs mesures, alors les deux particules jumelles en disposent aussi. Leur raisonnement montre que si *A* et *B* choisissent librement – sans que cela soit déterminé

par l'état de l'Univers avant l'instant de leur choix – les axes x , y et z (pour *A*) et l'axe w (pour *B*), alors il en va de même pour les particules a et b dont il est impossible que les réponses qu'elles donnent aux mesures soient entièrement déterminées par l'état de l'Univers avant l'instant de la mesure.

Grâce à cette évidence, on peut déduire une forme de localité. En effet, selon la théorie de la relativité, tous les repères inertiels (en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre) sont équivalents du point de vue des lois de la physique. De plus, si deux événements E_1 et E_2 se déroulent simultanément dans un certain repère inertiel, on peut trouver un autre repère inertiel dans lequel E_2 se déroule avant E_1 , et un autre encore dans lequel E_1 se déroule avant E_2 . Le principe de causalité (pas d'influence en arrière dans le temps) et le simple fait d'être éloigné dans l'espace entraînent donc, du fait des changements de repères possibles, l'impossibilité d'une influence de E_2 sur E_1 et réciproquement.

Une affirmation du type «*E* influence *F*» n'a un sens précis que dans un monde où tout n'est pas fixé à l'avance, car si tout est parfaitement déterminé, les notions d'indépendance et d'influence ne signifient rien. Du coup, pour formuler précisément l'idée de localité qui fait intervenir la notion d'influence, il faut admettre que l'expérimentateur fait des choix qui ne sont pas déterminés : il faut admettre qu'il dispose de libre arbitre dans le sens fonctionnel que J. Conway et S. Kochen donnent à ces mots. La formulation d'un axiome de localité, exprimant ce qui semble résulter de la théorie

de la relativité, oblige à faire l'hypothèse du libre arbitre des expérimentateurs.

Pour J. Conway, la question n'est pas de savoir si le déterminisme est vrai ou faux. Pour lui, comme le solipsisme (l'affirmation que rien d'autre n'existe en dehors de moi), le déterminisme n'est pas réfutable. Si quelqu'un pense que ce qui se passe dans le monde est déjà fixé, rien ne pourra l'en dissuader. La mécanique quantique suggère que le déterminisme est faux [et c'est l'avis de J. Conway et S. Kochen], mais ne le prouve pas, car c'est impossible à prouver. J. Conway et S. Kochen s'intéressent à la relation entre le libre arbitre des expérimentateurs (s'ils en ont) et celui des particules.

Ces remarques expliquent la formulation du troisième axiome, qui affirme que dans l'expérience de pensée *A-B-a-b* (déjà utilisée pour TWIN), ce que choisit *A* n'influe pas sur *b* et que ce que choisit *B* n'influe pas sur *a*.

Axiome MIN. *Supposons que les expériences menées par A et B soient spatialement séparées et simultanées dans un certain repère inertiel. Le choix par B de l'une des 33 directions de Peres, w , est libre, et le résultat de l'expérience pour a est indépendant de ce choix. De même, le choix par A d'un repère orthogonal x, y, z est libre et le résultat pour b est indépendant de ce choix.*

Enfin, le théorème !

Nous sommes maintenant prêts pour l'énoncé et la démonstration du théorème du libre arbitre.

Théorème du libre arbitre. *Les axiomes SPIN, TWIN et MIN impliquent que la réponse d'une particule de spin unité à une expérience de mesure du carré du spin selon trois axes orthogonaux est libre, c'est-à-dire n'est pas une fonction de l'état de l'Univers avant l'instant de la réponse.*

La démonstration peut se formuler de manière plus ou moins technique en utilisant un appareillage de notations plus ou moins complexes. Nous en donnerons une version qui nous semble adaptée ; ceux qui la trouveront trop vague pourront lire celle de J. Conway et S. Kochen en : <http://www.ams.org/notices/200902/rtx090200226p.pdf>.

L'idée est d'utiliser l'axiome MIN qui indique que les choix faits par *A* et par *B* sont libres et de supposer que ceux faits par les particules jumelles a et b ne le sont pas, puis d'aboutir à une contradiction par l'utilisation du théorème de Kochen-Specker.

Si le choix fait par la particule a n'est pas libre, cela signifie que ce choix est une fonction de l'état de l'Univers avant la mesure faite par l'expérimentateur *A*, état qui bien

sûr dépend en particulier du choix opéré par A des trois axes orthogonaux x , y et z , retenus librement par lui, mais, d'après l'axiome MIN, ne dépend pas de l'axe w choisit par B .

De même, la réponse donnée à la mesure opérée par B sur b selon l'axe w ne dépend que de l'état de la partie de l'Univers autour de b avant la mesure, partie qui inclut l'information w , mais n'inclut pas les informations x , y et z d'après l'axiome MIN.

L'axiome TWIN indique, lui, que si w est parallèle à l'un des axes x , y ou z choisis par A , la mesure faite par B sur b donnera le même résultat que la mesure faite par A sur a pour l'axe correspondant. Cela signifie que si A change de triplet x , y , z , les valeurs trouvées par A pour un axe donné ne changeront pas.

L'axiome SPIN indique alors qu'il existe une attribution des valeurs 0 et 1 aux 33 axes de Peres telle que chaque triplet d'axes orthogonaux reçoive les valeurs 1-0-1, 1-1-0 ou 0-1-1. L'existence d'une telle attribution contredit le théorème de Kochen-Specker. Nous sommes arrivés à une contradiction, qui signifie que l'hypothèse « les choix des particules a et b ne sont pas libres » est fausse.

Libre arbitre et hasard

Il ne fait pas de doute que l'effort nécessaire pour suivre l'argument de J. Conway et S. Kochen est assez important, c'est souvent le cas en mécanique quantique, mais si la chose avait été totalement évidente, on n'aurait pas attendu 2006 pour découvrir cette conséquence inattendue de deux des théories les mieux vérifiées de la physique. Comme le raisonnement isole parfaitement les points de ces théories nécessaires pour le mener et qu'il ne présuppose donc aucune des autres affirmations de ces théories, c'est l'intérêt de la mobilisation des esprits mathématiques, on découvre que les difficultés créées par les théories physiques modernes résultent d'un nombre très limité d'affirmations.

Parmi les trois axiomes, deux sont testables. Le troisième ne l'est pas, car la propriété de localité qu'il exprime est aussi impossible à prouver que la fausseté du solipsisme. Il est cependant en parfaite conformité avec toutes les expériences qu'on peut mener et qui n'ont jamais permis le transfert

instantané d'informations d'un point de l'Univers à un autre. Précisons que les expériences dites de téléportation quantique n'ont jamais pour conséquence le transfert instantané d'informations choisies ou la mise en évidence d'actions causales instantanées, mais qu'elles réalisent seulement, comme dans le cas des particules jumelles (qu'elles utilisent) la révélation d'informations partagées inconscientes et sans doute indéterminées... ce qui est très différent.

L'utilisation du terme libre arbitre par les deux mathématiciens est une provocation délibérée dont le but est de faire comprendre que l'indéterminisme a été, à tort, lié aux probabilités, alors que sa véritable nature réside dans la définition fonctionnelle de la non-détermination d'un fait ou d'une information relativement à un contexte physique. Voici ce qu'en disent J. Conway et S. Kochen : « Certains pensent que la seule alternative au déterminisme est l'aléatoire de la théorie des probabilités et ajoutent pourtant qu'autoriser l'aléatoire dans le monde n'aide pas vraiment à comprendre le libre arbitre. Nous pensons que les processus probabilistes classiques comme le lancer d'une pièce parfaite n'aident pas à expliquer le libre arbitre, mais nous pensons qu'il se pourrait bien aussi qu'utiliser l'aléatoire de la théorie de probabilités n'aide pas plus à expliquer les effets quantiques que notre théorème met en avant.

Le type de liberté des particules jumelles, et plus généralement l'intrication quantique, montrent que quelque chose de très différent de l'aléatoire classique des probabilités joue ici. [...] Dans l'état actuel des connaissances, il est certainement au-delà de nos capacités de compréhension d'établir un lien entre les décisions libres des particules et celles des humains, mais l'aléatoire de la théorie de probabilités ne rend compte ni du libre arbitre des humains ni de celui des particules. »

L'indéterminisme de la mécanique quantique est bien plus subtil et profond que celui décrit par les probabilités et c'est ce que le théorème du libre arbitre montre de manière flagrante, changeant sans doute profondément les analyses qu'on fera à partir de maintenant de la mécanique quantique. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

J. Conway, S. Kochen, **The strong free will theorem**, *The Notices of the American Mathematical Society*, vol. 56, n° 2, pp. 1441-1473, février 2009.

J. Conway, S. Kochen, **The free will theorem**, *Found. Phys.*, vol. 36, 1441-1473, 2006.

S. Kochen, et E. Specker, **The problem of hidden variables in quantum mechanics**, *J. Math. Mech.*, vol. 17, pp. 59-88, 1967.

H. Carsten, **The Kochen-Specker Theorem**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006 : <http://plato.stanford.edu/entries/kochen-specker/>

Jeffrey Barrett, **Quantum Mechanics of Minds and Worlds**, Oxford University Press, 1999.

J. Conway, **Free Will and Determinism in Science and Philosophy**. Conférences filmées : http://www.princeton.edu/WebMedia/flash/lectures/2009_03_04_cconway_free_will.shtml.